

# Αλγεβρικές Δομές I

## Τρίτη 4 Φεβρουαρίου 2020

1. (1 μονάδα) Πόσα στοιχεία τάξης 2 και πόσα τάξης 3 έχουν οι παρακάτω ομάδες

$$S_4, \quad A_4 \times Z_2.$$

Είναι οι ομάδες ισόμορφες:

2. (1 μονάδα) Θεωρούμε την συνάρτηση  $\sigma : \{1, \dots, 16\} \rightarrow \{1, \dots, 16\}$  με  $\sigma(x) = x + 6$  αν  $x \leq 10$  και  $\sigma(x) = x - 10$  αν  $x > 10$ . Δείξτε ότι η  $\sigma$  είναι στοιχείο της υποομάδας  $A_{16}$  της ομάδας μεταθέσεων  $S_{16}$ . Υπολογίστε το  $\sigma^{2020}$  και το  $\sigma^{-1}$ .
3. (1 μονάδα) Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων από το σώμα των πραγματικών αριθμών στο δακτύλιο των ακεραίων αριθμών.
4. (1 μονάδα) Έστω  $a \in Z$  με  $[a]_{45} \in U(Z_{45})$ . Δείξτε ότι η τάξη του  $[a]_{45}$  στην ομάδα  $U(Z_{45})$  είναι διαφορετική από την τάξη του  $[a]_{45}$  στην ομάδα  $Z_{45}$ .
5. (1 μονάδα) Δείξτε ότι μια κυκλική ομάδα έχει το πολύ δύο στοιχεία τάξης 3.
6. (1 μονάδα) Με ποιά γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η ομάδα πηλίκο
- $$Z_4 \times Z_6 / \langle ([2]_4, [4]_6) \rangle;$$
7. (1 μονάδα) Θεωρούμε το σύνολο  $G$  των  $3 \times 3$  πινάκων με στοιχεία ακεραίους και ορίζουσα μη μηδενική. Είναι το  $G$  ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων;
8. (1 μονάδα) Δείξτε ότι αν μια ομάδα  $G$  έχει ακριβώς μια υποομάδα  $H$  τάξης  $d \in N$ , τότε η  $H$  είναι κανονική.
9. (1 μονάδα) Έστω  $\varphi$  ομομορφισμός δακτυλίων από τον  $R$  στον  $R'$ . Δείξτε ότι ο πυρήνας  $\ker(\varphi)$  είναι ιδεώδες του δακτυλίου  $R$ . Δείξτε ότι  $\varphi$  είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν  $\ker(\varphi) = \{0\}$ .
10. (1 μονάδα) Έστω  $G$  ομάδα και  $H$  μια κανονική υποομάδα της με δείκτη  $m$  και  $n$  φυσικός αριθμός πρώτος με τον  $m$ . Δείξτε ότι κάθε  $a \in G$  που έχει τάξη  $n$  ανήκει στην  $H$ .

Καλή επιτυχία